NO DATE 08/05/17

• $I = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{t^2-3}\,dt = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})}\,dt$

$\rightarrow \frac{1}{(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})} = \frac{A}{(t+\sqrt{3})} + \frac{B}{(t-\sqrt{3})}$

$= \frac{A(t-\sqrt{3}) + B(t+\sqrt{3})}{(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})}$

$= \frac{(A+B)t + B\sqrt{3} - A\sqrt{3}}{(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})}$

Άρα $\begin{cases} A+B=0 \\ (B-A)\sqrt{3}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ B=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{\sqrt{3}}{6} \\ B=\frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases}$

Συνεπώς $I = -\frac{\sqrt{3}}{6}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{t+\sqrt{3}}\,dt + \frac{\sqrt{3}}{6}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{t-\sqrt{3}}\,dt$

$= -\frac{\sqrt{3}}{6}\left[\log(t+\sqrt{3})\right]_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\log(\sqrt{3}-t)\right]_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\log\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) - \log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \log\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{6}\log(3) + \frac{\sqrt{3}}{6}\log\left(\frac{1}{3}\right) = -2\,\frac{\sqrt{3}}{6}\log 3$

$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\log 3$

NO DATE

$$I=\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx.$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής είναι η παράγωγος του παρονομαστή, αν ο πρώτος πολλαπλασιαστεί με κατάλληλη σταθερά. Συνεπώς:

$$I=\frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}\,dx=\frac{1}{4}\log(x^4+1)+c.$$

(*) Αν θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε το x^4+1, θα προχωρούσαμε ως εξής:

$$\begin{aligned} x^4+1 &= x^4+2x^2+1-2x^2 \\ &= (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2 \\ &= (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1) \end{aligned}$$

Αν θέλουμε να το αναλύσουμε σε απλά κλάσματα τότε:

$$\frac{x^3}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{\Gamma x+\Delta}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

NO DATE

$$I=\int \frac{x^3+2x^2+3x+1}{x^2-3x+2}\,dx.$$

Διαίρεση πολυωνύμου:

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2+3x+1 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2-2x & x+5 \\ \cline{1-1} 5x^2+x+1 & \\ -5x^2+15x-10 & \\ \cline{1-1} 16x-9 & \end{array}$$

Η ταυτότητα της ευκλ. διαίρεσης του πολ. είναι: $x^3+2x^2+3x+1=(x^2-3x+2)(x+5)+16x-9$.

Άρα $I=\int x+5+\dfrac{16x-9}{x^2-3x+2}\,dx$.

$$\frac{16x-9}{x^2-3x+2}=\frac{16x-9}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

$$=\frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)}=\frac{(A+B)x+(-2A-B)}{(x-1)(x-2)}$$

Άρα $\begin{cases} A+B=16 \\ -2A-B=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A=7 \\ A+B=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-7 \\ B=23 \end{cases}$

NO DATE

Συνεπώς $I=\int x+5+\frac{-7}{x-1}+\frac{23}{x-2}\,dx.$

$=\frac{x^2}{2}+5x+(-7)\log(|x-1|)+23\log(|x-2|)+c.$

- $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{-3x-4}{x^3-2x^2+x-2}\,dx.$

$x^3-2x^2+x-2=x^2(x-2)+(x-2)=(x-2)(x^2+1)$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{-3x-4}{(x-2)(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}$$

$$=\frac{Ax^2+A+Bx^2+\Gamma x-2Bx-2\Gamma}{(x-2)(x^2+1)}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(\Gamma-2B)x+(A-2\Gamma)}{(x-2)(x^2+1)}$$

$$\begin{cases}A+B=0\\ \Gamma-2B=-3\\ A-2\Gamma=4.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}A=-B\\ \Gamma=2B-3\\ -B-2(2B-3)=-4\end{cases}\Leftrightarrow -B-4B+6=-4$$

$\Leftrightarrow -5B=-10$

$\Leftrightarrow \begin{cases}A=-2\\ \Gamma=1\\ B=2\end{cases}$

Ans

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{-2}{x-2}\,dx + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx.$$

$$= -2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x-2}\,dx + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

$$= -2\left[\log(2-x)\right]_1^{\sqrt{3}} + \left[\log(x^2+1)\right]_1^{\sqrt{3}} + \left[\arctan x\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= -2\left(\log(2-\sqrt{3}) - \log 1\right) + \left(\log 4 - \log 2\right) + \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1)$$

$$= -2\log(2-\sqrt{3}) + \log 2 + \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \log\left(\frac{2}{(2-\sqrt{3})^2}\right) + \frac{\pi}{12}$$

$$\frac{2}{(2-\sqrt{3})^2} = \frac{2}{4+3-4\sqrt{3}} = \frac{2(7+4\sqrt{3})}{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}$$

$$= \log(14+8\sqrt{3}) + \frac{\pi}{12}.$$

$$I=\int\frac{1}{x^2+4}\,dx=\int\frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητών $y=\frac{x}{2}$.
Μετάβαση στο ολοκλήρωμα:

$$I'=\frac{1}{4}\int\frac{1}{y^2+1}\,2\,dy=\frac{1}{2}\arctan(y)+C$$

Συνεπώς $I=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C$.

Επαλήθευση: $\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C\right)'=$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}+0=\frac{1}{x^2+4}$$

$$I=\int\frac{2x+7}{x^2+4x+5}\,dx=\int\frac{2x+4}{x^2+4x+5}+\frac{3}{x^2+4x+5}\,dx$$

$$=\log(x^2+4x+5)+3\arctan(x+2)+C$$

$$\frac{3}{x^2+4x+5}=\frac{3}{x^2+4x+4+1}=\frac{3}{(x+2)^2+1}$$

Άσκηση (Σταθερά του Euler)

Δίνεται η ακολουθία:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n)$$

Ν.δ.ο. η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

$$\frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \le \frac{1}{k}.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \log(n+1) -$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n)\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

≤ 0, σύμφωνα με τα προηγούμενα.

Άρα $a_{n+1} \le a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, δηλ. η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα.

Επίσης για $n \ge 2$:

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \dots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x}\,dx$$

$$\le 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

και άρα: $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx \ge \frac{1}{n} > 0$

NO DATE

Απόδειξη η (a_n) είναι κάτω φραγμένη (από το 0).

Επομένως αφού η (a_n) είναι φθίνουσα και φραγμένη, είναι συγκλίνουσα.

* Ιστορική σημείωση: Το όριο της παραπάνω ακολουθίας συμβολίζεται με γ και ονομάζεται σταθερά του Euler.
$\gamma \simeq 0,5772\ldots$
Δεν είναι γνωστό αν το γ είναι ρητό ή άρρητο.

Παρατήρηση: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \leq \log(n) \leq$

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}.$$

Γενικευμένα ολοκληρώματα:

Ορισμός: Έστω $f:[a,+\infty) \to \mathbb{R}$, μια συνάρτηση που είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[a,x]$, (για $x>a$). Αν το όριο $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ και είναι πραγματικός αριθμός λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,+\infty)$ ή ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ συγκλίνει.

Αν το παραπάνω όριο υπάρχει και είναι $+\infty$ (αντιστ. $-\infty$) λέμε ότι το γεν. ολοκλήρ. της f στο $[\alpha,+\infty)$ αποκλίνει στο $+\infty$ (αντιστ. στο $-\infty$).

Θέτουμε $\int_{\alpha}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$.

Εντελώς ανάλογα για συναρτήσεις $f:(-\infty,\beta]\to\mathbb{R}$

. . . . .

$\int_{-\infty}^{\beta} f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{\beta} f(t)\,dt$.

→ Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ολοκλ. σε κάθε $[\alpha,\beta]$ επιλέγουμε $c\in\mathbb{R}$ (τυχαίο) και θέτουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

υπό την προϋπόθεση ότι τα 2 γενικευμ. ολοκλ. στο δεξί μέλος υπάρχουν και ορίζεται το άθροισμά τους.

→ Αν $f:[\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ ολοκλ. σε κάθε $[\alpha,x]$ (για $\alpha<x<\beta$) εξετάζουμε την ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to\beta^-} \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$.

NO DATE

2) Αν $f:(\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχ. σε κάθε $[x,\beta]$ (για $\alpha<x<\beta$) εξετάζουμε την ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to\alpha^+}\int_x^\beta f(t)\,dt$.

$f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$, δηλ. $c\in(\alpha,\beta)$ στα $(\alpha,c],[c,\beta)$...

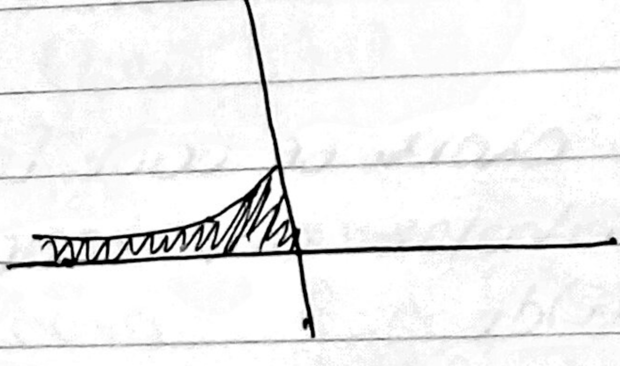
Παραδείγματα

α) $$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}\,dt$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{t=x} = \lim_{x\to+\infty}\left((-e^{-x})-(-e^{0})\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(1-e^{-x}) = 1.$$

β) όμοια $\int_{-\infty}^0 e^t\,dt = 1$.



NO DATE

γ) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \left[\log(t)\right]_{t=1}^{t=x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$

Το γενικό ολοκλ. αποκλίνει στο $+\infty$.

δ) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x t^{-p}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{t^{-p+1}}{-p+1}\right]_{t=1}^{t=x}$

Για $p\neq1$.

$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right)$ → αν $p>1$ $= \frac{1}{p-1}$ → αν $p<1$ $= +\infty$.

ε) $\int_0^1 \log t\,dt$ γενικευμένο ολοκλήρωμα

η $\log t$ δεν ορίζεται στο 0 και ωστόσο δεν είναι φραγμένη στο $(0,1]$ είναι ολοκλ. στο $[x,1]$ ως συνεχής $\forall\, 0<x<1$.

$= \lim_{x\to0^+} \int_x^1 \log t\,dt = \lim_{x\to0^+} \left[t\log t - t\right]_{t=x}^{t=1}$.

$= \lim_{x\to0^+} \left((-1) - (x\log x - x)\right)$.